ECOLE DE L'AIR PREMIERE EPREUVE A OPTION T - TA

Dans ce problème, on examine la possibilité de construire dans un espace euclidien de dimension 3 un système de quatre points A, B, C, D dont les distances mutuelles sont imposées.

I) On se donne les six longueurs AB = BC = CD = DA = 1, AC = a>0, BD = b>0

1- Montrer que si les points ont les distances indiquées, alors le plan médiateur de AC passe par B et D, et celui de BD passe par A et C.

2- Que dire des deux directions des droites AC et BD ?

3- Montrer que la perpendiculaire commune à AC et BD est l'intersection de ces deux plans médiateurs.

4- En projetant les quatre points sur une plan perpendiculaire à cette perpendiculaire commune, quelle figure obtient-on ?

5- En déduire que l'on a alors $AC^2 + BD^2 \leq 4$.

6- Montrer qu'inversement, si on donne a et b avec $a^2 + b^2 \leq 4$, il est possible de construire quatre points dont les distances ont les valeurs indiquées.

II) On veut cette fois déterminer quand il est possible de réaliser AB = AD = BD = CD = 1, AC = a, BC = b. On fixe sur la droite AB le repère formé de l'origine A et du vecteur AB.

1- Préciser la projection orthogonale M de D sur AB et la distance MD.

2- Préciser de même en fonction de a et b l'abscisse u de la projection orthogonale N de C sur AB et la distance h = NC.

3- Montrer que l'existence des quatre points satisfaisant les conditions indiquées équivaut au système d'inégalités :

$$\begin{cases} |a-b| \leq 1 \leq a+b \\ \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(h-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \leq 1 \leq \left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(h+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

4- On porte dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal l'ensemble des points de coordonnées a, b vérifiant cette condition. Montrer que c'est une région E délimitée par deux arcs d'ellipse, dont on précisera les longueurs des axes.

Il est conseillé de faire apparaître les fonctions symétriques élémentaires en a^2 et b^2, puis de prendre comme nouveau repère celui qui s'obtient par rotation de $-\frac{\pi}{4}$ à partir de $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5- Dessiner cette région E.

6- Evaluer l'aire de E.